

Utilisation d'infrastructures géodésiques mondiales pour la réalisation nationale

Auteurs : Legouge Raphaël (Shom), André Gaël (Shom), Missault Adélaïde (Shom), Le Deunf Julian (Shom), Branchu Samuel (IGN).

Relecteurs : Membres du groupe de travail sur la mise en œuvre du décret sur les systèmes géodésiques légaux (GT-MOD).

1 Cadre d'emploi de ce document

Ce document vient expliciter les méthodes à employer pour réaliser la transformation de coordonnées exprimées dans un repère de référence géodésique dérivé d'une réalisation de l'ITRS vers un autre repère de référence géodésique dérivé également d'une réalisation de l'ITRS.

Ainsi des positions déterminées en PPP, bien souvent exprimées dans le repère des orbites et horloges, ou lors de traitements différentiels utilisant des stations dont les coordonnées sont connues dans une réalisation de l'ITRS, peuvent être transformées dans les repères de références légaux.

2 Description

2.1 Contexte

Les systèmes de référence internationaux considérés dans ce document sont :

- le système international *International Terrestrial Reference System* (ITRS)
- le système européen *European Terrestrial Reference System* (ETRS89). Ce système est issu de l'ITRS par ancrage de la plaque tectonique eurasienne à l'époque 1989.0. Son utilisation est actuellement préconisée par la directive européenne INSPIRE.

Leurs réalisations sont des repères de référence (*Terrestrial Reference Frames* - TRF). Les repères géodésiques utilisés actuellement sont ITRF2014 (Altamimi et al., 2016, JGR) et ETRF2000, (Boucher, C. and Altamimi, Z., 2011. *Memo: specifications for reference frame fixing in the analysis of a EUREF GNSS campaign.*).

La France a adopté une réalisation de l'ETRS89 (en Métropole) ou de l'ITRS (en dehors de la métropole) comme repères de référence nationale. Il s'agit de réalisations au « deuxième degré », puisque s'appuyant sur un ITRFyyyy (repère cinématique) ou un ETRFyyyy en fixant une époque et en éliminant les vitesses en faisant bouger le repère de référence national avec la plaque tectonique associée (repère statique).

Ce document va décrire les calculs à mettre en place afin de pouvoir exprimer des coordonnées dans les systèmes légaux.

2.2 Notations

Lors d'un changement de repère de référence géodésique, il y a un repère de départ F_1 et un repère d'arrivée F_2 . Les paramètres permettant de passer d'un repère à un autre sont exprimés à une époque de référence t_0 .

La transformation permettant de changer la date à laquelle les coordonnées sont exprimées dans est appelée un changement d'époque, notée $T_{F_i}(t_1, t_2)$ avec t_1 l'époque de départ et t_2 l'époque d'arrivée.

La transformation permettant de changer d'ITRF est appelée changement de réalisation. Ce type de transformation ne peut être réalisé qu'à une époque commune entre les deux réalisations, notée t . Cette transformation permet donc de passer d'un repère de référence F_1 appuyé sur l' $ITRF_1$ considéré à l'époque t à un repère de référence F_2 appuyé sur l' $ITRF_2$ considéré à la même époque t . Cette transformation sera notée $T(ITRF_1, ITRF_2, t)$.

2.3 Conventions

Dans ce document, un certain nombre de conventions seront utilisées :

- Toutes les coordonnées utilisées seront des [coordonnées ECEF géocentriques](#), exprimées en mètre ;
- Toutes les vitesses utilisées seront des vitesses ECEF, exprimées en m/an ;
- Toutes les époques seront exprimées en années décimales ;
- Les vecteurs de rotation de plaques sont exprimés en mas/an ;
- Les vecteurs ORB (Origin Rate Bias, Cf. 3.2.2) sont exprimés en mm/an ;
- Les réalisations de l'ITRS sont notées ITRFyyyy@eeee.eee, où yyyy est le millésime de l'ITRF et eeee.eee son époque de référence en année décimale.

2.4 Méthode générale

Afin de passer d'un repère de référence géodésique F_1 appuyé sur l' $ITRF_1$ considéré à l'époque t_1 à un autre repère géodésique F_2 appuyé sur l' $ITRF_2$ considéré à l'époque t_2 , il faut réaliser un changement d'époque dans le repère de départ ($T_{F_1}(t_1, t_0)$), puis réaliser un changement de réalisation ($T(ITRF_1, ITRF_2, t_0)$), et enfin réaliser un changement d'époque dans le repère d'arrivée ($T_{F_2}(t_0, t_2)$) (Cf.

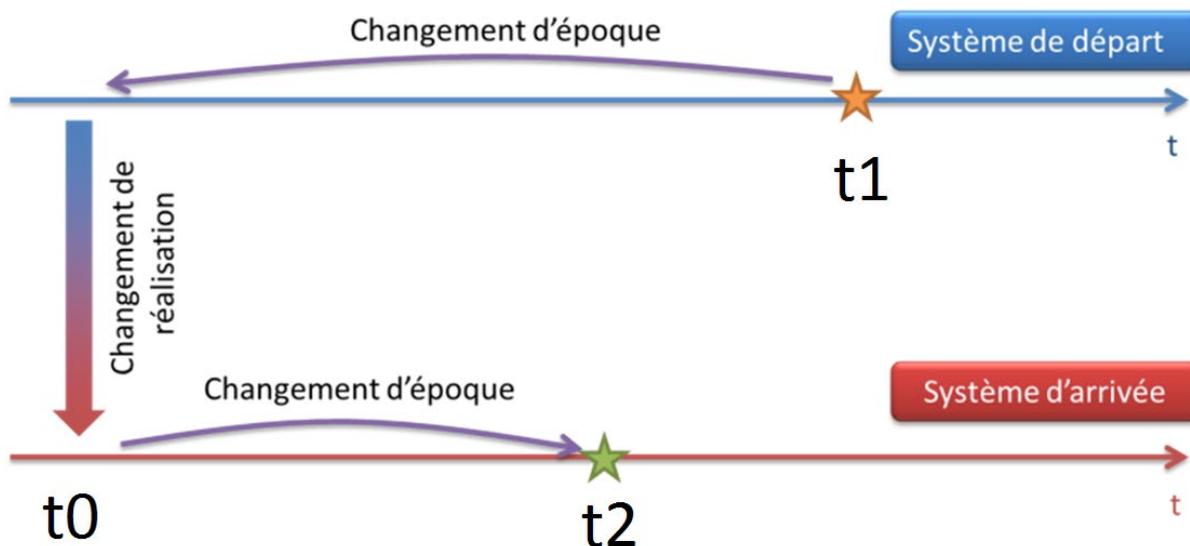


Figure 1).

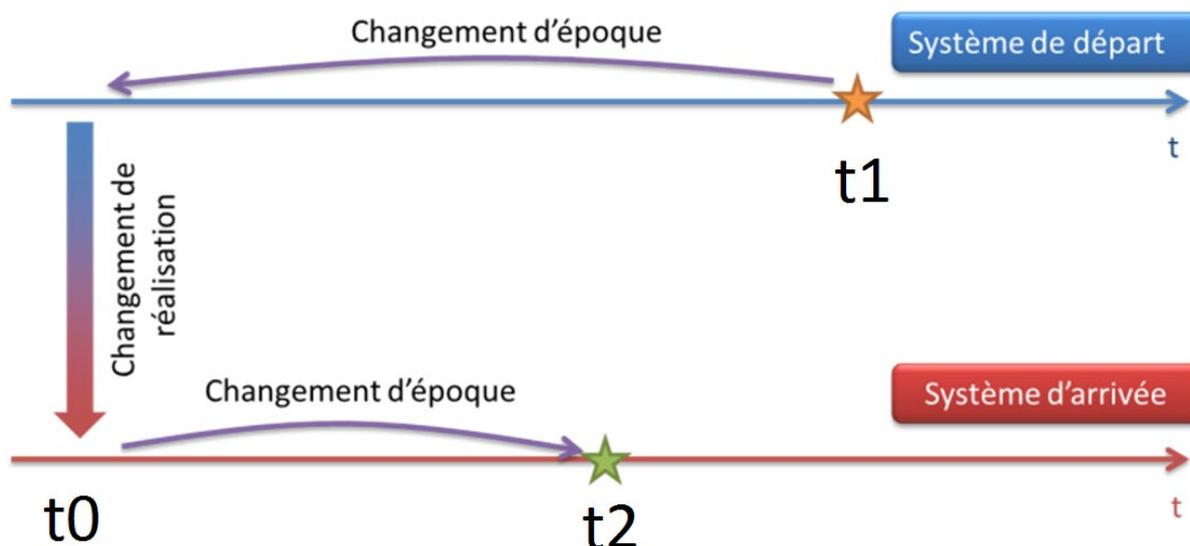


Figure 1 : Schéma représentant la transformation de coordonnées d'un repère de référence géodésique à un autre.

En connaissant les dérivées des paramètres de changement de réalisation, il est possible de les exprimer à une autre époque que t_0 . Il est alors possible d'éviter un changement d'époque en exprimant les paramètres de changement de réalisation en t_1 ou t_2 .

De manière rigoureuse aucune solution n'est meilleure qu'une autre. Cependant, les plus anciennes réalisations de repère ne bénéficiaient pas d'autant d'observations que les réalisations récentes. Cela a peu d'impact sur les changements de réalisation, mais pour les changements d'époque, l'incertitude sur la vitesse des stations est bien meilleure dans les réalisations les plus récentes. Il sera donc préférable de réaliser les changements d'époque uniquement dans la réalisation de repère la plus récente.

A l'issue de toutes ces transformations, le repère dans lequel on se trouve n'est pas exactement le repère auquel avaient abouti les calculs lors de la création du repère de référence. Il existe une différence nommée « biais de mise en référence » qu'il est nécessaire d'appliquer si l'on souhaite atteindre la meilleure incertitude.

3 Changement d'époque

Lors d'un changement d'époque, on ne change pas de repère géodésique, on vient seulement considérer ce repère à une autre date. Les changements d'époques sont donc reliés aux déplacements subis par les stations. Le déplacement des stations doit être modélisé afin de pouvoir exprimer les coordonnées à la date voulue.

3.1 Station dont la vitesse est connue

3.1.1 Station n'ayant pas subi de discontinuités

Si la vitesse de la station est connue et constante, afin de réaliser le changement d'époque il faut utiliser la formule suivante permettant le changement d'époque.

$$\begin{pmatrix} X(t_2) \\ Y(t_2) \\ Z(t_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(t_1) \\ Y(t_1) \\ Z(t_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} * (t_2 - t_1)$$

Avec :

$\begin{pmatrix} X(t_1) \\ Y(t_1) \\ Z(t_1) \end{pmatrix}$	les coordonnées de la station à l'époque t_1
$\begin{pmatrix} X(t_2) \\ Y(t_2) \\ Z(t_2) \end{pmatrix}$	les coordonnées de la station à l'époque t_2
$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix}$	le vecteur vitesse de la station

Le calcul de l'incertitude associée est décrit dans le 3.3.1

3.1.2 Station ayant subi des discontinuités

Si la station a subi des événements sismiques ou environnementaux (changement de matériel d'observation, mouvement du support), alors il existe probablement des discontinuités dans la série temporelle de position associée à cette station. Il existe alors une liste de dates pour chaque événement (informations disponibles sur le site web de [l'ITRF](#)) ; pour chaque événement, une nouvelle position et une nouvelle paramétrisation de la vitesse peuvent être données.

Ci-dessous les liens pour trouver les différents fichiers contenant les discontinuités des stations ITRF pour les 4 ITRF les plus récents :

Réalisation de l'ITRS associée	Source
ITRF2014	http://itrf.ensg.ign.fr/ITRF_solutions/2014/computation_strategy.php?page=2
ITRF2008	http://itrf.ensg.ign.fr/ITRF_solutions/2008/computation_strategy.php?page=2
ITRF2005	http://itrf.ensg.ign.fr/ITRF_solutions/2005/computation_strategy.php?page=2
ITRF2000	https://www.iers.org/SharedDocs/Publikationen/EN/IERS/Publications/tn/TechnNote31/tn31.pdf?__blob=publicationFile&v=1

3.1.2.1 Station sans PSD

Si la station ne comporte pas de PSD, alors seule la paramétrisation linéaire est à utiliser. Pour se ramener au cas du 3.1.1, il faut choisir le couple vitesse et position correspondant.

En revanche, si sur la période $[t_1 ; t_2]$ la station a subi au moins une discontinuité il faudra choisir comme point de départ le couple position et vitesse qui précède t_2 .

Le calcul de l'incertitude associée est décrit dans le 3.3.1

3.1.2.2 Station avec des PSD

S'il existe des PSD (Post-Sismique Deformation), alors la vitesse est paramétrisée à l'aide d'une relation linéaire (Cf. 3.1.2.1) ainsi que d'un ou plusieurs termes à ajouter (dépendances en log, exp, cos, sin).

$$X_{PSD}(t) = X(t_0) + \dot{X}(t - t_0) + \delta X_{PSD}(t)$$

Pour plus d'information sur les PSD et leur calcul : http://itrf.ensg.ign.fr/ITRF_solutions/2014/psd.php. La quasi-totalité des stations comportant des PSD se trouvent très proche ($< \sim 100\text{km}$) d'un bord de plaque tectonique. Les réalisations antérieures à l'ITRF2014 ne comportent pas de PSD.

Le calcul de l'incertitude associée est décrit dans le 3.3.2

3.2 Station dont la vitesse est inconnue

3.2.1 Station proche d'une station dont la vitesse est connue

Il est tout à fait possible d'utiliser la vitesse d'une station proche, la seule condition à remplir est que les deux stations considérées doivent se déplacer de la même manière (la vitesse relative entre les deux stations doit être nulle).

Le calcul de l'incertitude associée est décrit dans le 3.3.1

3.2.2 Modélisation de la vitesse d'une station en utilisant un vecteur de rotation

Si une station est suffisamment loin des bords de la plaque tectonique sur laquelle elle se trouve, alors son déplacement peut être considéré similaire à celui de la plaque rigide sur laquelle elle est localisée.

Dans ce cas, la formule permettant de déterminer la vitesse de la station est la suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = \omega \wedge \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + ORB$$

Avec :

$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix}$	le vecteur vitesse de la station
---	----------------------------------

ω	le vecteur de rotation de la plaque tectonique ¹
$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$	la position de la station
ORB	le vecteur « Origin Rate Bias »

Si le modèle donne des incertitudes sur les vitesses des stations obtenues, alors le calcul de l'incertitude associée est décrit dans le 3.3.1

Si le modèle donne des incertitudes sur le vecteur de rotation et l'ORB, alors le calcul de l'incertitude associée est décrit dans le 3.3.3

Remarque :

Les auteurs des modèles ITRF08 PMM et ITRF14 PMM recommandent de ne pas appliquer les vecteurs ORB pour les raisons suivantes :

- Les incertitudes sur les valeurs estimées sont grandes comparées aux valeurs estimées. Il est probable donc que les valeurs estimées ne soient pas représentatives.
- La sélection des sites avec lesquels l'estimation est menée à un impact fort sur le résultat obtenu.

3.2.3 Autres cas

Lorsque la station se trouve proche d'un bord de plaque, son déplacement peut ne pas être considéré comme identique au vecteur de rotation de la plaque tectonique, il n'est alors pas possible d'utiliser une modélisation de la vitesse en utilisant un vecteur de rotation associé à la plaque sur laquelle se trouve la station.

Dans ce cas, soit la station permet de dégager une série temporelle d'une durée importante permettant de déterminer son modèle de déplacement (soit en déterminant sa vitesse dans le repère soit en déterminant sa vitesse par rapport à la plaque sur laquelle elle se trouve), soit il n'est pas possible de réaliser de changement d'époque.

3.3 Propagation de l'incertitude

3.3.1 Cas linéaire

D'après l'équation du 3.1.1, l'incertitude sur la position de la station liée à un changement d'époque se propage d'une époque à une autre avec la formule suivante :

$$\sigma_{ChEpoque}^2 = \sigma_{Vitesse}^2 * (t_1 - t_2)^2$$

Avec :

$\sigma_{ChEpoque}^2$	la variance liée au changement d'époque
-----------------------	---

¹ La liste des vecteurs de rotation des plaques est disponible au § 7.3

$\sigma_{Vitesse}^2$	la variance sur la vitesse
$(t_1 - t_2)^2$	le carré de l'amplitude du changement d'époque

3.3.2 Cas linéaire avec PSD

D'après l'équation du 3.1.2.2, l'incertitude sur la position de la station liée à un changement d'époque se propage d'une époque à une autre avec la formule suivante :

$$\sigma_{ChEpoque}^2 = \sigma_{Vitesse}^2 * (t_1 - t_2)^2 + \sigma_{PSD}^2$$

Avec :

$\sigma_{ChEpoque}^2$	la variance liée au changement d'époque
$\sigma_{Vitesse}^2$	la variance sur la vitesse
$(t_1 - t_2)^2$	le carré de l'amplitude du changement d'époque
σ_{PSD}^2	La variance sur les PSD

$\sigma_{Vitesse}^2$ est déterminée de la même manière que dans le 3.3.1.

σ_{PSD}^2 est à calculer à partir des équations données dans le document disponible à l'adresse suivante : http://itrf.eng.ign.fr/ITRF_solutions/2014/doc/ITRF2014-PSD-model-eqs-IGN.pdf

Remarque :

Dans le document expliquant le calcul des PSD, σ_{PSD}^2 est le vecteur composé des éléments diagonaux de la matrice de covariance $var(\delta L)$ et la matrice R permettant de réaliser le changement de repère (ENU -> ECEF géocentrique) est disponible à l'adresse suivante : http://www.navipedia.net/index.php/Transformations_between_ECEF_and_ENU_coordinates.

$$\begin{pmatrix} \delta_X \\ \delta_Y \\ \delta_Z \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} \delta_E \\ \delta_N \\ \delta_U \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \delta_X \\ \delta_Y \\ \delta_Z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \lambda & -\cos \lambda \sin \varphi & \cos \lambda \cos \varphi \\ \cos \lambda & -\sin \lambda \sin \varphi & \sin \lambda \cos \varphi \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_E \\ \delta_N \\ \delta_U \end{pmatrix}$$

Avec :

$\begin{pmatrix} \delta_X \\ \delta_Y \\ \delta_Z \end{pmatrix}$	un vecteur exprimé dans le repère ECEF géocentrique
$\begin{pmatrix} \delta_E \\ \delta_N \\ \delta_U \end{pmatrix}$	un vecteur exprimé dans le repère local (East, North, Up)

λ, φ La longitude et la latitude de la station (la latitude et la longitude de la station peuvent être calculées à partir des coordonnées ECEF géocentriques, la méthode à appliquer est sur le [site web de l'IGN.](#))

3.3.3 Cas d'un vecteur de rotation

D'après l'équation du 3.2.2, l'incertitude sur la position de la station liée à un changement d'époque se propage d'une époque à une autre avec la formule suivante :

$$\sigma_{ChEpoque}^2 = \sigma_{Vitesse}^2 * (t_1 - t_2)^2$$

Avec

$$\sigma_{Vitesse}^2 = Var\left(\omega \wedge \begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix} + ORB\right)$$

D'où :

$$\sigma_{Vitesse}^2 = Var\left(\omega \wedge \begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix}\right) + Var(ORB)$$

Et donc, en négligeant tout impact de l'incertitude sur la position de la station (hypothèse étayée par le fait que deux stations proches possèdent des vitesses très similaires) :

$$\sigma_{Vitesse}^2 = \begin{matrix} Z^2 \cdot Var(\omega_Y) + Y^2 \cdot Var(\omega_Z) \\ Z^2 \cdot Var(\omega_X) + X^2 \cdot Var(\omega_Z) + Var(ORB) \\ Y^2 \cdot Var(\omega_X) + X^2 \cdot Var(\omega_Y) \end{matrix}$$

Avec :

$\sigma_{ChEpoque}^2$	la variance liée au changement d'époque
$\sigma_{Vitesse}^2$	la variance sur la vitesse
$(t_1 - t_2)^2$	le carré de l'amplitude du changement d'époque
$Var(\omega_i)$	la variance des composantes du vecteur de rotation, données par le modèle
$\begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix}$	le vecteur position de la station
$Var(ORB)$	la variance du vecteur ORB, donnée par le modèle

4 Changement de réalisation

Ce changement est effectué par le développement limité d'une transformation de Helmert. Cette transformation s'appuie sur les 7 paramètres $T_X, T_Y, T_Z, D, R_X, R_Y, R_Z$, avec :

- T_X, T_Y et T_Z les paramètres de translation ;
- D le paramètre de changement d'échelle en ppm (homothétie par rapport à l'origine) ;
- R_X, R_Y et R_Z les paramètres de rotation.

Ces paramètres sont systématiquement publiés à chaque nouvelle réalisation d'un nouvel ITRF, entre la nouvelle réalisation et au moins la réalisation précédente, ils sont exprimés à l'époque de référence t_0 .

La transformation de Helmert s'écrit de la façon suivante, considérant le vecteur en entrée (X_A, Y_A, Z_A) et le vecteur en sortie (X_B, Y_B, Z_B) :

$$\begin{bmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \end{bmatrix} + D \cdot \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -R_Z & R_Y \\ R_Z & 0 & -R_X \\ -R_Y & R_X & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{bmatrix}$$

4.1 Changement d'époque des paramètres de Helmert

Les paramètres de transformation de Helmert² sont exprimés à une certaine époque de référence t_0 , traduisant le fait que l'on connaît le passage d'une réalisation à une autre seulement à une époque donnée. Cependant, les dérivées de ces paramètres sont également connues, ce qui permet de déterminer la valeur des paramètres à n'importe quelle autre époque t_0' . Il faut réaliser une modification des paramètres de transformation pour obtenir les paramètres de transfert à l'époque à laquelle le changement de réalisation est désiré.

On obtient les paramètres à une autre époque et réalisant l'opération suivante sur chaque paramètre :

$$\forall P_i \in \{T_X, T_Y, T_Z, D, R_X, R_Y, R_Z\} P_i(t_0') = P_i(t_0) + \dot{P}_i * (t_0' - t_0)$$

A partir des 7 paramètres, calculés à l'époque désirée, le changement de réalisation s'effectue en appliquant la transformation de Helmert aux coordonnées que l'on souhaite transformer. Le résultat de la transformation sera alors les coordonnées dans la réalisation d'arrivée.

4.2 Propagation de l'incertitude

Comme les valeurs des paramètres de Helmert sont souvent très petites et les sigmas associés très faibles, il n'est pas rare de dire que

$$\begin{bmatrix} \sigma_{X_B}^2 \\ \sigma_{Y_B}^2 \\ \sigma_{Z_B}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{X_A}^2 \\ \sigma_{Y_A}^2 \\ \sigma_{Z_A}^2 \end{bmatrix}$$

Pour plus de détails sur la propagation complète de l'incertitude lors du changement de réalisation :

Comme

² Disponibles au §7.4

$$\begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \end{pmatrix} + D \cdot \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -R_Z & R_Y \\ R_Z & 0 & -R_X \\ -R_Y & R_X & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} (1+D) & -R_Z & R_Y \\ R_Z & (1+D) & -R_X \\ -R_Y & R_X & (1+D) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix}$$

En utilisant les formules suivantes sur les variances :

$$Var(A + B) = Var(A) + Var(B) + 2 * cov(A, B)$$

$$Var(A * B) = Cov(A^2, B^2) + (Var(A) + E(A)^2) * (Var(B) + E(B)^2) - (Cov(A, B) + E(A) * E(B))^2$$

On obtient, en supposant que tous les paramètres sont indépendants :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{X_B}^2 \\ \sigma_{Y_B}^2 \\ \sigma_{Z_B}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{T_X}^2 \\ \sigma_{T_Y}^2 \\ \sigma_{T_Z}^2 \end{pmatrix} + Var \left(\begin{bmatrix} (1+D) & -R_Z & R_Y \\ R_Z & (1+D) & -R_X \\ -R_Y & R_X & (1+D) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{X_B}^2 \\ \sigma_{Y_B}^2 \\ \sigma_{Z_B}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{T_X}^2 \\ \sigma_{T_Y}^2 \\ \sigma_{T_Z}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{X_A}^2 \\ \sigma_{Y_A}^2 \\ \sigma_{Z_A}^2 \end{pmatrix} + \sigma_D^2 * \left(\begin{pmatrix} \sigma_{X_A}^2 \\ \sigma_{Y_A}^2 \\ \sigma_{Z_A}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_A^2 \\ Y_A^2 \\ Z_A^2 \end{pmatrix} \right) + D^2 * \begin{pmatrix} \sigma_{X_A}^2 \\ \sigma_{Y_A}^2 \\ \sigma_{Z_A}^2 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} \sigma_{Y_A}^2 * \sigma_{R_Z}^2 + \sigma_{Y_A}^2 * R_Z^2 + \sigma_{R_Z}^2 * Y_A^2 + \sigma_{Z_A}^2 * \sigma_{R_Y}^2 + \sigma_{Z_A}^2 * R_Y^2 + \sigma_{R_Y}^2 * Z_A^2 \\ \sigma_{X_A}^2 * \sigma_{R_Z}^2 + \sigma_{X_A}^2 * R_Z^2 + \sigma_{R_Z}^2 * X_A^2 + \sigma_{Z_A}^2 * \sigma_{R_X}^2 + \sigma_{Z_A}^2 * R_X^2 + \sigma_{R_X}^2 * Z_A^2 \\ \sigma_{X_A}^2 * \sigma_{R_Y}^2 + \sigma_{X_A}^2 * R_Y^2 + \sigma_{R_Y}^2 * X_A^2 + \sigma_{Y_A}^2 * \sigma_{R_X}^2 + \sigma_{Y_A}^2 * R_X^2 + \sigma_{R_X}^2 * Y_A^2 \end{pmatrix}$$

5 Biais de mise en référence

En France, chaque repère de référence légal n'est pas rigoureusement confondu avec le repère de référence géodésique sur lequel il est basé. Cette différence est appelée biais de mise en référence.

Les biais de mise en référence constatés sur des stations de références sont qualitativement issus de diverses sources :

- La détermination initiale du repère de référence légal,
- L'incertitude de la vitesse de plaque,
- L'incertitude des déterminations des stations de référence,

La complexité des biais de mise en référence implique que les transformations soient recalculées régulièrement. Ce processus évolutif nécessite le calcul de solutions GNSS cumulées sur les stations permanentes de chaque entité territoriale.

Dans l'attente d'une application en ligne, on se reportera au § 6.5 pour un tableau estimatif des biais valide à la date du 01/11/2016. *Pour plus d'information contacter le Service de Géodésie et de Nivellement de l'IGN : SGM@ign.fr.*

Si l'incertitude recherchée lors du changement de repère est plus faible que l'amplitude des biais de mise en référence associé au repère de référence (Cf. 6.5) il faut corriger la position de la station de ces biais. Dans le cas contraire, la transformation peut s'arrêter ici et ainsi ignorer les biais de mise en référence.

5.1 Application des biais de mise en référence

Dans le cas d'une application des biais de mise en référence³, les valeurs correspondantes sont à ajouter à la solution, l'incertitude sera alors recalculée :

$$\begin{pmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_E \\ Y_E \\ Z_E \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_{Biais} \\ Y_{Biais} \\ Z_{Biais} \end{pmatrix}$$

Avec :

$\begin{pmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{pmatrix}$	La solution modifiée des biais de mise en référence
$\begin{pmatrix} X_E \\ Y_E \\ Z_E \end{pmatrix}$	La solution sur laquelle il faut appliquer les biais de mise en référence
$\begin{pmatrix} X_{Biais} \\ Y_{Biais} \\ Z_{Biais} \end{pmatrix}$	Le vecteur biais de mise en référence

L'incertitude de la solution est calculée de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{X_S}^2 \\ \sigma_{Y_S}^2 \\ \sigma_{Z_S}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{X_E}^2 \\ \sigma_{Y_E}^2 \\ \sigma_{Z_E}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{X_{Biais}}^2 \\ \sigma_{Y_{Biais}}^2 \\ \sigma_{Z_{Biais}}^2 \end{pmatrix}$$

Avec :

³ Ordre de grandeur des biais de mise en référence disponibles au 6.5

$\left \begin{array}{l} \sigma_{X_S}^2 \\ \sigma_{Y_S}^2 \\ \sigma_{Z_S}^2 \end{array} \right.$	L'incertitude sur la solution prenant en compte les biais
$\left \begin{array}{l} \sigma_{X_E}^2 \\ \sigma_{Y_E}^2 \\ \sigma_{Z_E}^2 \end{array} \right.$	L'incertitude de la solution avant application des biais
$\left \begin{array}{l} \sigma_{X_{Biais}}^2 \\ \sigma_{Y_{Biais}}^2 \\ \sigma_{Z_{Biais}}^2 \end{array} \right.$	L'incertitude associée aux biais

5.2 Non-application des biais de mise en référence

Dans le cas d'une non-application des biais de mise en référence, la solution ne sera pas transformée. Cependant, l'incertitude associée à cette solution est à dégrader de l'amplitude du biais non corrigé :

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_{X_S}^2 \\ \sigma_{Y_S}^2 \\ \sigma_{Z_S}^2 \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} \sigma_{X_E}^2 \\ \sigma_{Y_E}^2 \\ \sigma_{Z_E}^2 \end{array} \right. + \left| \begin{array}{l} X_{Biais}^2 \\ Y_{Biais}^2 \\ Z_{Biais}^2 \end{array} \right.$$

Avec :

$\left \begin{array}{l} \sigma_{X_S}^2 \\ \sigma_{Y_S}^2 \\ \sigma_{Z_S}^2 \end{array} \right.$	L'incertitude de la solution dégradée
$\left \begin{array}{l} \sigma_{X_E}^2 \\ \sigma_{Y_E}^2 \\ \sigma_{Z_E}^2 \end{array} \right.$	L'incertitude de la solution à dégrader
$\left \begin{array}{l} X_{Biais} \\ Y_{Biais} \\ Z_{Biais} \end{array} \right.$	L'amplitude du biais de mise en référence

6 Données sources

Afin de pouvoir effectuer toutes les transformations décrites précédemment, il est indispensable d'avoir accès à certaines données :

6.1 Définition des réalisations existantes

Ci-dessous la liste des différents repères de référence géodésiques rencontrés sur les territoires Français :

Nom	Emprise	Réalisation de l'ITRS associée	Source
RGF93	France métropolitaine	ETRF2000@2009	http://geodesie.ign.fr/index.php?page=rgf93
RGFG95	Guyane	ITRF1993@1995	https://geodesie.ign.fr/contenu/fichiers/documentation/SRCfrance.pdf
RGTAAF	Ile Amsterdam Iles Crozet Ile Europa Iles Kerguelen Ile Saint Paul Ile Petrels Terre Adélie	ITRF2005@2007.270	http://geodesie.ign.fr/contenu/fichiers/documentation/srtom/SystemeCOM.pdf
RGSPM06	Saint-Pierre et Miquelon	ITRF2000@2006	http://geodesie.ign.fr/contenu/fichiers/documentation/srtom/SystemeCOM.pdf
RGM04	Mayotte	ITRF2000@2004	http://geodesie.ign.fr/contenu/fichiers/documentation/srtom/SystemeCOM.pdf
RGR92	Réunion	ITRF1991@1993	http://geodesie.ign.fr/contenu/fichiers/documentation/srtom/systemeReunion.pdf
RGAF09	Antilles Française	ITRF2005@2009	https://geodesie.ign.fr/contenu/fichiers/documentation/srtom/Antilles-Geodesie-2017-v2-1.pdf
RGWF	Wallis et Futuna	ITRF1994@1993	https://dittt.gouv.nc/geodesie-et-nivellement/les-referentiels-de-nouvelle-caledonie
RGPF92	Polynésie Française	ITRF1992@1993	http://www.shom.fr/les-activites/activites-scientifiques/reseau-geodesique-de-polynesie-francaise-rgpf/le-rgpf/
RGNC91-93	Nouvelle Calédonie	ITRF1990@1989	https://dittt.gouv.nc/geodesie-et-nivellement/les-referentiels-de-nouvelle-caledonie

6.2 Positions et vitesses de stations dans les réalisations de l'ITRS

Les positions et vitesses des stations de l'IGS calculées dans les différentes réalisations de l'ITRS sont accessibles sur le site de [l'ITRF](#) (rubrique « Get ITRF coord. »).

6.3 Vecteurs de rotation des plaques tectoniques

Ci-dessous une liste des différents modèles de vitesse des plaques tectoniques :

Nom du modèle	Réalisation de l'ITRS associée	Source
ITRF2014 PMM	ITRF2014	Altamimi, Z.; Métivier, L. & Collilieux, X. ITRF2008 plate motion model Journal of Geophysical Research, 2012, 117, B07402
ITRF2008 PMM	ITRF2008	Altamimi, Z.; Métivier, L.; Rebischung, P.; Rouby, H. & Collilieux, X. ITRF2014 plate motion model Geophysical Journal International, 2017, 209, 1906-1912

6.4 Paramètres de transformation

Ci-dessous une liste des différents paramètres de transformation de Helmert :

Réalisation de départ	Réalisations(s) d'arrivée	Source
ITRF2014	ITRF's précédents	http://itrf.ign.fr/doc_ITRF/Transfo-ITRF2014_ITRFs.txt
ITRF2008	ITRF's précédents	http://itrf.ign.fr/doc_ITRF/Transfo-ITRF2008_ITRFs.txt
ITRF2005	ITRF2000	http://itrf.ign.fr/ITRF_solutions/2005/tp_05-00.php
ITRF2000	ITRF's précédents	ftp://itrf.ensg.ign.fr/pub/itrf/ITRF.TP
ITRF2014 et précédents	ETRF2014	http://etrs89.ensg.ign.fr/pub/EUREF-TN-1.pdf
ITRF2008 et précédents	ETRF2000	http://etrs89.ensg.ign.fr/memo-V8.pdf

6.5 Biais de mise en référence

Ci-dessous la liste des biais de mise en référence pour les repères de référence géodésiques rencontrés sur le territoire Français à la date du 01/11/2016 :

Nom	Emprise	Ordre de grandeur du biais 3D
RGF93	France métropolitaine	≈ 0
RGFG95	Guyane	~4 cm
RGTAAF	Ile Amsterdam Iles Crozet Ile Europa Iles Kerguelen Ile Saint Paul Ile Petrels Terre Adélie	Non déterminé
RGSPM06	Saint-Pierre et Miquelon	~4 cm
RGM04	Mayotte	< 1 cm
RGR92	Réunion	~7 cm
RGAF09	Antilles Françaises	< 1 cm
RGWF	Wallis et Futuna	Non déterminé
RGPF92	Polynésie Française	~30 cm
RGNC91-93	Nouvelle Calédonie	~60 cm

7 Exemples numériques

7.1 Changement d'époque sans changement de réalisation

Dans cet exemple, l'objectif est de transformer les coordonnées $\begin{cases} X_{I08@2005} \\ Y_{I08@2005} \\ Z_{I08@2005} \end{cases} = \begin{cases} -5246415.521 \\ -3077260.014 \\ -1913842.208 \end{cases}$ de la station THTI, exprimées dans l'ITRF2008 @ 2005, dans l'ITRF2008 @ 2010.

7.1.1 Raisonnement

Les époques du repère d'arrivée et du repère de départ ne sont pas les mêmes, il va donc falloir réaliser un changement d'époque. Cependant, les réalisations associées aux repères de départ et d'arrivée sont identiques donc aucun changement de réalisation n'est à effectuer.

Pour réaliser un changement d'époque il faut déterminer la vitesse de la station. La vitesse n'est pas donnée, donc elle va être supposée inconnue.

La vitesse de cette station dans l'ITRF2008 est connue. Mais nous allons la considérer inconnue pour cet exemple.

Cette station se trouve en Polynésie Française, sur la plaque tectonique Pacifique (PCFC). Elle se trouve suffisamment loin des bords de cette plaque pour que son mouvement soit cohérent avec la plaque rigide associée.

Nous allons donc modéliser la vitesse de la station en utilisant le vecteur de rotation associé à cette plaque.

Dans le modèle ITRF08 PMM, on peut trouver les composantes du vecteur de rotation de la plaque PCCF, ainsi que l'ORB :

$$\omega_{PCCF} = \begin{pmatrix} -0.411 \\ 1.036 \\ -2.166 \end{pmatrix} \text{ (en mas/an) et } ORB = \begin{pmatrix} 0.41 \\ 0.22 \\ 0.41 \end{pmatrix} \text{ (en mm/an)}$$

7.1.2 Application

En appliquant la formule du 3.2.2, on obtient alors le vecteur vitesse suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = \omega \wedge \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + ORB$$

Le vecteur ORB sera négligé. (Cf. remarque dans le 3.2.2)

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = \frac{2 * \pi}{1000 * 3600 * 360} * \begin{pmatrix} -0.411 \\ 1.036 \\ -2.166 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -5246415.5210 \\ -3077260.0140 \\ -1913842.2080 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0419 \\ 0.0513 \\ 0.0325 \end{pmatrix}$$

En appliquant la formule du 3.1.1, on obtient les coordonnées suivantes :

$$\begin{pmatrix} X_{I08@2010} \\ Y_{I08@2010} \\ Z_{I08@2010} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5246415.521 \\ -3077260.014 \\ -1913842.208 \end{pmatrix} + (2010 - 2005) \cdot \begin{pmatrix} -0.0419 \\ 0.0513 \\ 0.0325 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_{I08@2010} \\ Y_{I08@2010} \\ Z_{I08@2010} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5246415.7305 \\ -3077259.7575 \\ -1913842.0455 \end{pmatrix}$$

L'incertitude donnée par le modèle de vitesse est la suivante :

$$\begin{pmatrix} Var(\omega_X) \\ Var(\omega_Y) \\ Var(\omega_Z) \end{pmatrix} = \left(\frac{2 * \pi}{1000 * 3600 * 360} \right)^2 \cdot \begin{pmatrix} 0.007^2 \\ 0.007^2 \\ 0.009^2 \end{pmatrix}$$

D'après le 3.3.3, l'incertitude associée au changement est donc (le vecteur ORB est négligé) :

$$\sigma_{ChEpoque}^2 = (t_1 - t_2)^2 \cdot \begin{pmatrix} Z^2 \cdot Var(\omega_Y) + Y^2 \cdot Var(\omega_Z) \\ Z^2 \cdot Var(\omega_X) + X^2 \cdot Var(\omega_Z) \\ Y^2 \cdot Var(\omega_X) + X^2 \cdot Var(\omega_Y) \end{pmatrix}$$

Donc

$$\sigma_{ChEpoque}^2 = \frac{2 * \pi * (2010 - 2005)^2}{1000 * 3600 * 360} \cdot \begin{pmatrix} (-1913842.0455)^2 \cdot 0.007^2 + (-3077259.7575)^2 \cdot 0.009^2 \\ (-1913842.0455)^2 \cdot 0.007^2 + (-5246415.7305)^2 \cdot 0.009^2 \\ (-3077259.7575)^2 \cdot 0.007^2 + (-5246415.7305)^2 \cdot 0.007^2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{ChEpoque}^2 = \begin{pmatrix} 0.00000056 \\ 0.00000142 \\ 0.00000107 \end{pmatrix}$$

L'incertitude sur la position de la station dans l'ITRF08@2010 est de :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{X_{I08@2010}}^2 \\ \sigma_{Y_{I08@2010}}^2 \\ \sigma_{Z_{I08@2010}}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{X_{I08@2005}}^2 \\ \sigma_{Y_{I08@2005}}^2 \\ \sigma_{Z_{I08@2005}}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.00000056 \\ 0.00000142 \\ 0.00000107 \end{pmatrix}$$

7.2 Changement de réalisation sans changement d'époque

Dans cet exemple, l'objectif est de transformer les coordonnées $\begin{pmatrix} X_{I14@2015} \\ Y_{I14@2015} \\ Z_{I14@2015} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4870283.7460 \\ -3864605.3170 \\ -1418872.4970 \end{pmatrix}$

exprimées dans l'ITRF2014 @ 2015, dans l'ITRF2008 @ 2015.

7.2.1 Raisonnement

Les époques du repère d'arrivée et du repère de départ sont les mêmes, donc aucun changement d'époque n'est à effectuer. Cependant, les réalisations associées aux repères de départ et d'arrivée ne sont pas les mêmes il va donc falloir réaliser un changement de réalisation.

Pour réaliser un changement de réalisation, il faut effectuer une transformation de Helmert à 7 paramètres sur les coordonnées fournies.

Sur le site de [l'ITRF](#) on trouve les valeurs suivantes pour les paramètres de la transformation ITRF2014 -> ITRF2008 à l'époque 2010.0 :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_X(2010) = 1.6 \text{ mm} \\ T_Y(2010) = 1.9 \text{ mm} \\ T_Z(2010) = 2.4 \text{ mm} \\ D(2010) = -0.02 \text{ ppb} \\ R_X(2010) = 0.00 \text{ mas} \\ R_Y(2010) = 0.00 \text{ mas} \\ R_Z(2010) = 0.00 \text{ mas} \\ \dot{T}_X = 0.0 \text{ mm/an} \\ \dot{T}_Y = 0.0 \text{ mm/an} \\ \dot{T}_Z = -0.1 \text{ mm/an} \\ \dot{D} = 0.03 \text{ ppb/an} \\ \dot{R}_X = 0.00 \text{ mas/an} \\ \dot{R}_Y = 0.00 \text{ mas/an} \\ \dot{R}_Z = 0.00 \text{ mas/an} \end{array} \right.$$

Les paramètres de transfert étant connus à une époque différente de la transformation que l'on souhaite réaliser (2010 ≠ 2015), il faut passer tous les paramètres de transformation depuis l'époque 2010 vers l'époque 2015. On obtient alors :

$$\begin{cases} T_X(2015) = T_X(2010) + \dot{T}_X * (2015 - 2010) \\ T_Y(2015) = T_Y(2010) + \dot{T}_Y * (2015 - 2010) \\ T_Z(2015) = T_Z(2010) + \dot{T}_Z * (2015 - 2010) \\ D(2015) = D(2010) + \dot{D} * (2015 - 2010) \\ R_X(2015) = R_X(2010) + \dot{R}_X * (2015 - 2010) \\ R_Y(2015) = R_Y(2010) + \dot{R}_Y * (2015 - 2010) \\ R_Z(2015) = R_Z(2010) + \dot{R}_Z * (2015 - 2010) \end{cases}$$

7.2.2 Application

En réalisant l'application numérique, on obtient les 7 paramètres de la transformation de Helmert :

$$\begin{cases} T_X(2015) = 1.6 + 0.0 * (2015 - 2010) = 1.6 \text{ mm} = 0.0016 \text{ m} \\ T_Y(2015) = 1.9 + 0.0 * (2015 - 2010) = 1.9 \text{ mm} = 0.0019 \text{ m} \\ T_Z(2015) = 2.4 - 0.1 * (2015 - 2010) = 1.9 \text{ mm} = 0.0019 \text{ m} \\ D(2015) = -0.02 + 0.03 * (2015 - 2010) = 0.13 \text{ ppb} = 0.13 * 10^{-9} \\ R_X(2015) = 0.00 + 0.00 * (2015 - 2010) = 0.00 \text{ mas} = 0.00 \text{ rad} \\ R_Y(2015) = 0.00 + 0.00 * (2015 - 2010) = 0.00 \text{ mas} = 0.00 \text{ rad} \\ R_Z(2015) = 0.00 + 0.00 * (2015 - 2010) = 0.00 \text{ mas} = 0.00 \text{ rad} \end{cases}$$

En appliquant la formule du 4, on obtient :

$$\begin{vmatrix} X_{I08@2015} \\ Y_{I08@2015} \\ Z_{I08@2015} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_{I14@2015} \\ Y_{I14@2015} \\ Z_{I14@2015} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_X \\ T_Y + D \\ T_Z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X_{I14@2015} \\ Y_{I14@2015} \\ Z_{I14@2015} \end{vmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -R_Z & R_Y \\ R_Z & 0 & -R_X \\ -R_Y & R_X & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X_{I14@2015} \\ Y_{I14@2015} \\ Z_{I14@2015} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} X_{I08@2015} \\ Y_{I08@2015} \\ Z_{I08@2015} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_{I14@2015} \\ Y_{I14@2015} \\ Z_{I14@2015} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0.0016 \\ 0.0019 + 0.13 * 10^{-9} \\ 0.0019 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X_{I14@2015} \\ Y_{I14@2015} \\ Z_{I14@2015} \end{vmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X_{I14@2015} \\ Y_{I14@2015} \\ Z_{I14@2015} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} X_{I08@2015} \\ Y_{I08@2015} \\ Z_{I08@2015} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4870283.7460 \\ -3864605.3170 \\ -1418872.4970 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0.0016 \\ 0.0019 + 0.13 * 10^{-9} \\ 0.0019 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4870283.7460 \\ -3864605.3170 \\ -1418872.4970 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} X_{I08@2015} \\ Y_{I08@2015} \\ Z_{I08@2015} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4870283.7482 \\ -3864605.3156 \\ -1418872.4953 \end{vmatrix}$$

Propagation de l'incertitude :

Les variances sur les paramètres Tx, Ty, Tz, D, Rx, Ry et Rz sont faibles. Leur prise en compte dans la propagation de l'incertitude en utilisant la formule du 4.2 amènerait à considérer des termes en $O(10^{-8})$ n'affectant l'incertitude qu'en dessous du dixième de mm.

$$\begin{vmatrix} \sigma_{X_{I08@2015}}^2 \\ \sigma_{Y_{I08@2015}}^2 \\ \sigma_{Z_{I08@2015}}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_{X_{I14@2015}}^2 \\ \sigma_{Y_{I14@2015}}^2 \\ \sigma_{Z_{I14@2015}}^2 \end{vmatrix} + O(10^{-8})$$

Donc l'incertitude sur la position de la station dans l'ITRF2008 @ 2015 est de :

$$\begin{vmatrix} \sigma_{X_{008@2015}}^2 \\ \sigma_{Y_{108@2015}}^2 \\ \sigma_{Z_{108@2015}}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_{X_{114@2015}}^2 \\ \sigma_{Y_{114@2015}}^2 \\ \sigma_{Z_{114@2015}}^2 \end{vmatrix}$$

7.3 Changement de réalisation et changement d'époque

Dans cet exemple, l'objectif est de transformer les coordonnées de la station « MASB »

$$\begin{vmatrix} X_{108@2000} \\ Y_{108@2000} \\ Z_{108@2000} \end{vmatrix} =$$

$\begin{vmatrix} 4232503.4410 \\ -334538.1600 \\ 4743816.7480 \end{vmatrix}$ exprimées dans l'ITRF2008 @ 2000, dans le RGF93.

7.3.1 Raisonnement

D'après le 6.1, le RGF93 correspond à l'ETRF2000@2009.

Les époques du repère d'arrivée et du repère de départ ne sont pas les mêmes. Il va donc falloir réaliser un changement d'époque.

La vitesse n'étant pas donnée dans l'énoncé, on la suppose inconnue.

La position dont les coordonnées sont à transformer se trouve en France métropolitaine, on peut utiliser la station BRST se trouvant très proche et supposer que les deux stations ont une vitesse identique. Nous allons utiliser la vitesse de la station BRST dans l'ITRF08 pour modéliser la vitesse de notre station.

La vitesse de la station BRST est disponible sur le site de [l'ITRF](#) :

$$\begin{vmatrix} \dot{X}_{BRST} \\ \dot{Y}_{BRST} \\ \dot{Z}_{BRST} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.0115 \text{ m/an} \\ 0.0172 \text{ m/an} \\ 0.0115 \text{ m/an} \end{vmatrix} \text{ et } \begin{vmatrix} \sigma_{\dot{X}_{BRST}} \\ \sigma_{\dot{Y}_{BRST}} \\ \sigma_{\dot{Z}_{BRST}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.0001 \text{ m/an} \\ 0.0001 \text{ m/an} \\ 0.0001 \text{ m/an} \end{vmatrix}$$

La station BRST a subi des discontinuités, mais sa vitesse n'a pas été modifiée (ses coordonnées ont été modifiées de moins de 2 cm).

Les réalisations associées aux repères d'arrivée et de départ ne sont pas les mêmes. Il va donc falloir réaliser un changement de réalisation à l'aide d'une transformation de Helmert à 7 paramètres sur les coordonnées fournies.

Sur le site de [l'ETRS89](#) on trouve les valeurs suivantes pour les paramètres de la transformation ITRF2008 -> ETRF2000 à l'époque 2000.

$$\left\{ \begin{array}{l} T_X(2000) = 52.1 \text{ mm} \\ T_Y(2000) = 49.3 \text{ mm} \\ T_Z(2000) = -58.5 \text{ mm} \\ D(2000) = 1.34 \text{ ppb} \\ R_X(2000) = 0.891 \text{ mas} \\ R_Y(2000) = 5.390 \text{ mas} \\ R_Z(2000) = -8.712 \text{ mas} \\ \dot{T}_X = 0.1 \text{ mm/an} \\ \dot{T}_Y = 0.1 \text{ mm/an} \\ \dot{T}_Z = -1.8 \text{ mm/an} \\ \dot{D} = 0.08 \text{ ppb/an} \\ \dot{R}_X = 0.081 \text{ mas/an} \\ \dot{R}_Y = 0.490 \text{ mas/an} \\ \dot{R}_Z = -0.792 \text{ mas/an} \end{array} \right.$$

Les paramètres de transfert étant connus à une époque différente de la transformation que l'on souhaite réaliser (2000 ≠ 2009), il faut passer tous les paramètres de transformation depuis l'époque 2000 vers l'époque 2009. On obtient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_X(2009) = T_X(2000) + \dot{T}_X * (2009 - 2000) \\ T_Y(2009) = T_Y(2000) + \dot{T}_Y * (2009 - 2000) \\ T_Z(2009) = T_Z(2000) + \dot{T}_Z * (2009 - 2000) \\ D(2009) = D(2000) + \dot{D} * (2009 - 2000) \\ R_X(2009) = R_X(2000) + \dot{R}_X * (2009 - 2000) \\ R_Y(2009) = R_Y(2000) + \dot{R}_Y * (2009 - 2000) \\ R_Z(2009) = R_Z(2000) + \dot{R}_Z * (2009 - 2000) \end{array} \right.$$

Pour cet exemple, le tableau du §6.5 indique que la dernière réalisation du RGF93 présente un biais nul par rapport à la réalisation associée de l'ETRS89 pour le RGF93. Aucun biais ne sera à ajouter pour obtenir la solution finale.

7.3.2 Application

Dans un premier temps, on change d'époque, sans changer de réalisation en passant de l'ITRF2008@2000 à l'ITRF2008@2009.

En appliquant la formule du 3.2.2, on obtient les coordonnées suivantes :

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} X_{I08@2009} \\ Y_{I08@2009} \\ Z_{I08@2009} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} X_{I08@2000} \\ Y_{I08@2000} \\ Z_{I08@2000} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{l} \dot{X}_{BRST} \\ \dot{Y}_{BRST} \\ \dot{Z}_{BRST} \end{array} \right| * (2009 - 2000) \\ \\ \left| \begin{array}{l} X_{I08@2009} \\ Y_{I08@2009} \\ Z_{I08@2009} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} 4232503.441 \\ -334538.160 \\ 4743816.748 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{l} -1.15 * 10^{-2} \\ 1.72 * 10^{-2} \\ 1.15 * 10^{-2} \end{array} \right| * (2009 - 2000) \end{array}$$

$$\begin{cases} X_{I08@2009} \\ Y_{I08@2009} \\ Z_{I08@2009} \end{cases} = \begin{cases} 4232503.3375 \\ -334538.0052 \\ 4743816.8515 \end{cases}$$

En réalisant l'application numérique du § 7.3.1, on obtient les 7 paramètres de la transformation de Helmert permettant le changement de réalisation:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_X(2009) = 52.1 + 0.1 * (2009 - 2000) = 53 \text{ mm} = 0.053 \text{ m} \\ T_Y(2009) = 49.3 + 0.1 * (2009 - 2000) = 50.2 \text{ mm} = 0.0502 \text{ m} \\ T_Z(2009) = -58.5 - 1.8 * (2009 - 2000) = -74.7 \text{ mm} = -0.0747 \text{ m} \\ D(2009) = 1.34 + 0.08 * (2009 - 2000) = 2.06 \text{ ppb} = 2.06 * 10^{-9} \\ R_X(2009) = 0.891 + 0.081 * (2009 - 2000) = 1.62 \text{ mas} = 8 * 10^{-9} \text{ rad} \\ R_Y(2009) = 5.390 + 0.490 * (2009 - 2000) = 9.80 \text{ mas} = 48 * 10^{-9} \text{ rad} \\ R_Z(2009) = -8.71 - 0.792 * (2009 - 2000) = -15.84 \text{ mas} = -77 * 10^{-9} \text{ rad} \end{array} \right.$$

En appliquant la formule du 3.3.14, on obtient :

$$\begin{cases} X_{RGF93} \\ Y_{RGF93} \\ Z_{RGF93} \end{cases} = \begin{cases} X_{I08@2009} \\ Y_{I08@2009} \\ Z_{I08@2009} \end{cases} + \begin{cases} T_X \\ T_Y \\ T_Z \end{cases} + D \cdot \begin{cases} X_{I08@2009} \\ Y_{I08@2009} \\ Z_{I08@2009} \end{cases} + \begin{bmatrix} 0 & -R_Z & R_Y \\ R_Z & 0 & -R_X \\ -R_Y & R_X & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} X_{I08@2009} \\ Y_{I08@2009} \\ Z_{I08@2009} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_{RGF93} \\ Y_{RGF93} \\ Z_{RGF93} \end{cases} = \begin{cases} X_{I08@2009} \\ Y_{I08@2009} \\ Z_{I08@2009} \end{cases} + \begin{cases} 0.053 \\ 0.0502 \\ -0.0747 \end{cases} + 2.06 * 10^{-9} \cdot \begin{cases} X_{I08@2009} \\ Y_{I08@2009} \\ Z_{I08@2009} \end{cases} + \begin{bmatrix} 0 & 77 & 48 \\ -77 & 0 & -8 \\ -48 & 8 & 0 \end{bmatrix} * 10^{-9} \cdot \begin{cases} X_{I08@2009} \\ Y_{I08@2009} \\ Z_{I08@2009} \end{cases}$$

Les coordonnées de la station « MASB » dans le RGF93 sont donc :

$$\begin{cases} X_{RGF93} \\ Y_{RGF93} \\ Z_{RGF93} \end{cases} = \begin{cases} 4232503.6012 \\ -334538.3195 \\ 4743816.5807 \end{cases}$$

L'incertitude sur la position de la station « MASB » peut être calculée de la manière suivante (on suppose que le changement d'époque et le changement de réalisation sont indépendants) :

$$\begin{cases} \sigma_{X_{RGF93}}^2 \\ \sigma_{Y_{RGF93}}^2 \\ \sigma_{Z_{RGF93}}^2 \end{cases} = \begin{cases} \sigma_{X_{ChEpoque}}^2 \\ \sigma_{Y_{ChEpoque}}^2 \\ \sigma_{Z_{ChEpoque}}^2 \end{cases} + \begin{cases} \sigma_{X_{ChRéal}}^2 \\ \sigma_{Y_{ChRéal}}^2 \\ \sigma_{Z_{ChRéal}}^2 \end{cases} + \begin{cases} \sigma_{X_{I08@2000}}^2 \\ \sigma_{Y_{I08@2000}}^2 \\ \sigma_{Z_{I08@2000}}^2 \end{cases}$$

Avec :

$$\begin{cases} \sigma_{X_{ChEpoque}}^2 \\ \sigma_{Y_{ChEpoque}}^2 \\ \sigma_{Z_{ChEpoque}}^2 \end{cases} = \begin{cases} 0.0001^2 \\ 0.0001^2 * (2009 - 2000)^2 \\ 0.0001^2 \end{cases} = \begin{cases} 0.00000081 \\ 0.00000081 \\ 0.00000081 \end{cases}$$

La vitesse utilisée dans le changement d'époque est celle de la station BRST, on utilise également les données de la station BRST pour calculer l'incertitude sur la vitesse du point MASB.

Aucune variance n'est fournie sur les paramètres de transferts entre l'ITRF08 et l'ETRF2000. Comme les paramètres d'Helmert sont relativement faibles, alors l'incertitude associée au changement de réalisation est supposée nulle :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{X_{ChRéal}}^2 \\ \sigma_{Y_{ChRéal}}^2 \\ \sigma_{Z_{ChRéal}}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc l'incertitude sur la position de la station « MASB » vaut :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{X_{RGF93}}^2 \\ \sigma_{Y_{RGF93}}^2 \\ \sigma_{Z_{RGF93}}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.00000081 \\ 0.00000081 \\ 0.00000081 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{X_{I08@2000}}^2 \\ \sigma_{Y_{I08@2000}}^2 \\ \sigma_{Z_{I08@2000}}^2 \end{pmatrix}$$